

## КОМПЮТЪРНИ МОДЕЛИ НА ЕДНА ОЛИМПИЙСКА МАТЕМАТИЧЕСКА ЗАДАЧА

Тони Чехларова, Младен Вълков  
Институт по математика и информатика  
Българска академия на науките (България)

**Резюме.** Представени са динамични компютърни модели на една геометрична задача от XXIII балканска олимпиада по математика през 2006 г. Описани са идеи за използването им: за осигуряване на условия за изследователска работа и формулиране на хипотези, за откриване на идея за решаване, за представяне на решение, за изучаване на софтуера чрез задачи. Направена е препратка към динамични компютърни модели на други олимпийски задачи, предоставени във Виртуалния училищен кабинет по математика, разработван в Института по математика и информатика на Българската академия на науките. Обсъдена е възможността за използването им както в неформалното, така и във формалното образование по математика и информационни технологии.

**Ключови думи:** изследователски подход; олимпиада по математика; GeoGebra; компютърни модели

### 1. Увод

Една от целите при създаване на Виртуалния училищен кабинет по математика през 2013 г. беше осигуряване на условия за широко прилагане на изследователския подход в математическото образование (Chehlarova et al. 2014). Затова се използваха елементи от ресурси, разработвани по няколко европейски проекта, като *InnomathEd* и *Fibonacci*, чийто фокус бяха изследователският подход и иновациите в образованието по математика и природни науки (Kenderov 2010). Още през 2013 г. във Виртуалния училищен кабинет по математика бяха включени компютърни модели, разработени по олимпийски математически задачи. Целта бе да се демонстрира възможността за използването им както в неформалното, така и във формалното образование: за осигуряване на условия за изследователска работа по формулиране на хипотези, за откриване на идея за решаване, за представяне на решение, за изучаване на софтуера чрез задачи. Тук ще направим илюстрация с една задача от Балканската олимпиада по математика (БОМ) през 2006 г.

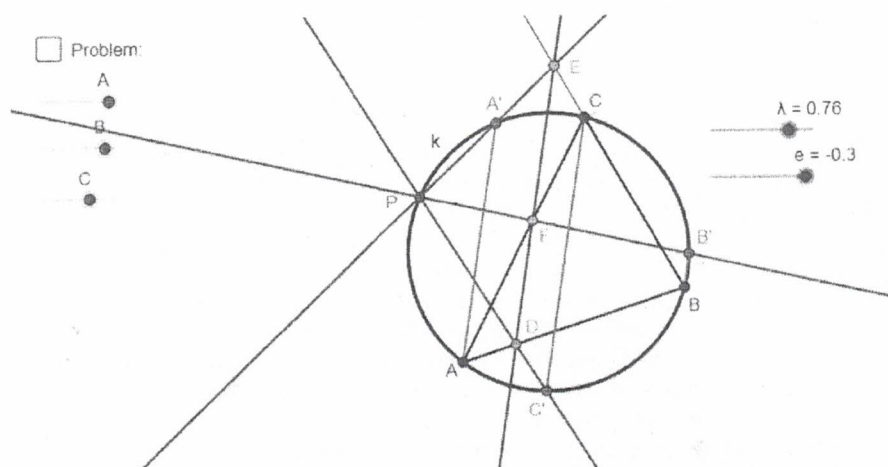


## 2. Компютърни модели на Задача 2 от XXIII БОМ

Математическото общество на Югоизточна Европа (MASSEE) е основано на 1 март 2003 г. Основните му дейности са организиране на състезания, разработване и изигълнение на изследователски проекти, организиране на научни събития и редактиране на специфични публикации. MASSEE е партньор на две важни регионални състезания, които традиционно привличат, освен 11-те страни – официални участници, средно поне още толкова отбори от страни в географския обхват от Великобритания до Индонезия. Това са Балканската олимпиада по математика (БОМ, Balkan Mathematical Olympiad, BMO) и Младежката балканска олимпиада по математика (МлБОМ, Junior Balkan Mathematical Olympiad, JBMO) (Kortezov & Marinov 2022, 2023).

Задача 2 от XXIII БОМ през 2006 г. е свързана с триъгълник, вписан в окръжност: „В окръжност  $k$  е вписан  $\triangle ABC$ . Права пресича страните му  $AB$  и  $AC$  и продължението на  $BC$  в точки  $D$ ,  $F$  и  $E$ , съответно, като  $C$  е между  $B$  и  $E$ . Хордите  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  на  $k$  са успоредни на  $DE$ . Да се докаже, че правите  $A'E$ ,  $B'F$  и  $C'D$  минават през една точка“ (Boyvalenkov et al. 2008).

За създаването на компютърни модели на геометрични конструкции като описаните в тази задача (фиг. 1) е подходящо използването на софтуера *GeoGebra* (Hohenwarter et al. 2009).



Фигура 1. Динамична конструкция по задача от XXIII БОМ<sup>1</sup>

На фиг. 2 е показан конструкционният протокол на построението.



Управлението на конструкцията се осъществява с помощта на плъзгачи-параметри.

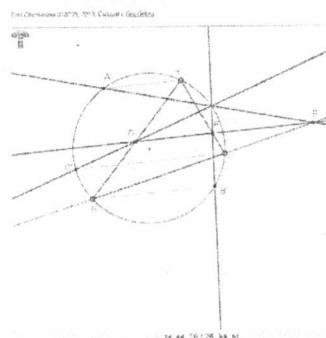
	Name	Icon	Description	Value
1	Circle k			$k: x^2 + y^2 = 36$
2	Angle $\varphi_1$			$\varphi_1 = 232^\circ$
3	Point A		$(6\cos(\varphi_1), 6\sin(\varphi_1))$	$A = (-3.69, -4.73)$
4	Angle $\varphi_2$			$\varphi_2 = 345^\circ$
5	Point B		$(6\cos(\varphi_2), 6\sin(\varphi_2))$	$B = (5.8, -1.55)$
6	Angle $\varphi_3$			$\varphi_3 = 75^\circ$
7	Point C		$(6\cos(\varphi_3), 6\sin(\varphi_3))$	$C = (1.55, 5.8)$
8	Triangle poly1		Polygon C, A, B	$\text{poly1} = 41.6$
8	Segment b		Segment C, A	$b = 11.76$
8	Segment $c_1$		Segment A, B	$c_1 = 10.01$
8	Segment a		Segment B, C	$a = 8.49$
9	Number $\lambda$			$\lambda = 0.76$
10	Point D		$\lambda A + (1 - \lambda) B$	$D = (-1.42, -3.97)$
11	Ray d		Ray through B, C	$d: -7.35x - 4.24y = -36$
12	Number e			$e = -0.3$
13	Point E		$e B + (1 - e) C$	$E = (0.28, 8)$
14	Line f		Line D, E	$f: -11.97x + 1.7y = 10.22$
15	Point F		Intersection of b and f	$F = (-0.66, 1.35)$
16	Line c		Line through A parallel to f	$c: -11.97x + 1.7y = 36.18$
17	Line g		Line through C parallel to f	$g: -11.97x + 1.7y = -8.75$
18	Line h		Line through B parallel to f	$h: -11.97x + 1.7y = -71.99$
19	Point A'		Intersection of k and c	$A' = (-2.23, 5.57)$
20	Segment i		Segment A, A'	$i = 10.4$
21	Point B'		Intersection of k and h	$B' = (6, -0.12)$
22	Segment l		Segment B, B'	$l = 1.45$
23	Point C'		Intersection of k and g	$C' = (-0.12, -6)$
24	Segment j		Segment C', C	$j = 11.91$
25	Line m		Line A', E	$m: -2.43x + 2.51y = 19.43$
26	Line n		Line B', F	$n: -1.47x - 6.66y = -8.03$
27	Point P		Intersection of m and n	$P = (-5.49, 2.42)$

Фигура 2. Конструкционен протокол

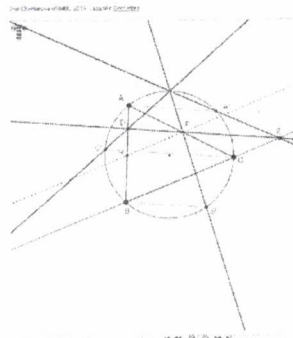
На фиг. 3 е показан вариант на динамична конструкция по тази задача, насочен към самостоятелно изследване и формулиране на хипотези, а на фиг. 4 – съответният конструкционен протокол.



Хипотези олимпиада



Хипотези олимпиада

Фигура 3. Динамични конструкции по задача от XXIII балканска олимпиада по математика<sup>2,3</sup>

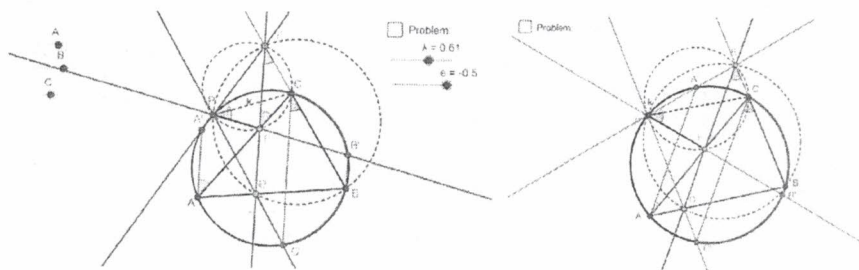
#	Name	Icon	Description	Value
1	Point O	•	Point O	$O = (4.03, 0.9)$
2	Point B <sub>1</sub>	•	Point B <sub>1</sub>	$B_1 = (7.74, 1.71)$
3	Circle c	⊙	Circle through B <sub>1</sub> with center O	$c: (x - 4.03)^2 + (y - 0.9)^2 = 14.44$
4	Point A	•	Point on c	$A = (5.64, 4.34)$
5	Point C	•	Point on c	$C = (7.82, 0.64)$
6	Point G	•	Point on c	$G = (1.18, -1.62)$
7	Triangle многоъгълник f	△	Polygon A, C, B	многоъгълник1 = 14.75
7	Segment e	—	Segment A, C	$e = 4.3$
7	Segment c <sub>1</sub>	—	Segment C, B	$c_1 = 7.01$
7	Segment d	—	Segment B, A	$d = 7.44$
8	Point F	•	Point on e	$F = (7.22, 1.66)$
9	Point D	•	Point on d	$D = (3.35, 1.28)$
10	Line a	—	Line C, B	$a: 2.26x - 6.63y = 13.45$
11	Line b	—	Line F, D	$b: 0.38x - 3.87y = -3.67$
12	Point E	×	Intersection of b and a	$E = (12.27, 2.16)$
13	Line f	—	Line through A parallel to b	$f: 0.38x - 3.87y = -14.64$
14	Line g	—	Line through B parallel to b	$g: 0.38x - 3.87y = 6.73$
15	Line h	—	Line through C parallel to b	$h: 0.38x - 3.87y = 0.51$
16	Point G	×	Intersection point of c, f	$G = (5.64, 4.34)$
16	Point A'	×	Intersection point of c, f	$A' = (1.77, 3.96)$
17	Point I	×	Intersection of h and g	$I = ?$
18	Point J	×	Intersection point of c, h	$J = (7.82, 0.64)$
18	Point C'	×	Intersection point of c, h	$C' = (0.36, -0.1)$
19	Point L	×	Intersection point of c, g	$L = (1.18, -1.62)$
19	Point B'	×	Intersection point of c, g	$B' = (7.31, -1.02)$
20	Segment i	—	Segment A, A'	$i = 3.88$
21	Segment j	—	Segment C', C	$j = 7.5$
22	Segment k	—	Segment B', B	$k = 6.15$
23	Line n	—	Line A', E	$n: 1.8x + 10.49y = 44.78$
24	Line o	—	Line B', F	$o: -2.68x - 0.09y = -19.49$

Фигура 4. Конструкционен протокол<sup>2,4</sup>



При организиране на построението се използват подвижни точки, за разлика от предходно описания файл, в който се използват плъзгачи-параметри. Основните обекти са построени чрез инструменти, предоставени от софтуера. Например  $\triangle ABC$  е построен с използване на инструмент за построяване на многоъгълник чрез върховете му. Някои от правите са построени чрез инструмент за построяване на права по дадени две точки от нея, или чрез инструмент за построяване на права, минаваща през дадена точка и успоредна на дадена права. Предоставена е възможност да се наблюдава построението стъпка по стъпка.

Следват още няколко файла по тази задача, при създаването на които са използвани различни идеи и функционалности на софтуера, включително предоставяне на помощ или решение (фиг. 5, фиг. 6).



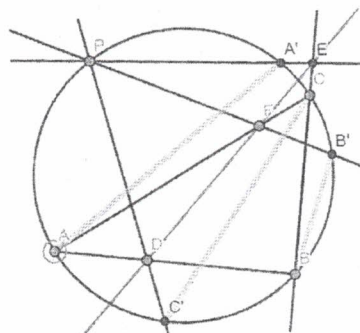
Фигура 5. Динамични конструкции по задача от XXIII ВМО<sup>5, 6</sup>

Динамичните файлове използват плъзгачи за местоположението на точки  $A, B, C, D$  и  $E$ , при продължителното местене на които може да се забележат важни за решението свойства. Може да се забележи, че ако  $B'F$  пресича окръжността в точка  $P$ , то  $PFCE$  и  $PADF$  са вписани в окръжност четириъгълници. Използването на спомагателни елементи стимулира решаващия сам да достигне до решение, бързо да изследва случаи (когато например триъгълник  $ABC$  е тъпоъгълен или остроъгълен или ако някоя от точките  $A'$  или  $B'$  съвпада с  $A$  или  $B$ , съответно). Решението на задачата може да започне от построяването на  $P$ , като пресечна точка на кои да е две от правите  $A'E, B'F, C'D$  и след изследване на ъгли да се намери, че два от четириъгълниците  $PFCE, PADF, PDCE$  са вписани в окръжност. Разглеждането и на трите възможности спомага за по-доброто разбиране на решението, а динамичният файл дава възможност това да се направи бързо.

Могат да се разгледат и обратни на разглежданата задачи, като се изследват с *GeoGebra*, например „Даден е  $\triangle ABC$  и точка  $P$  върху описаната ѝ окръжност. Взети са три точки  $D, E$ , и  $F$ , лежащи на страни-

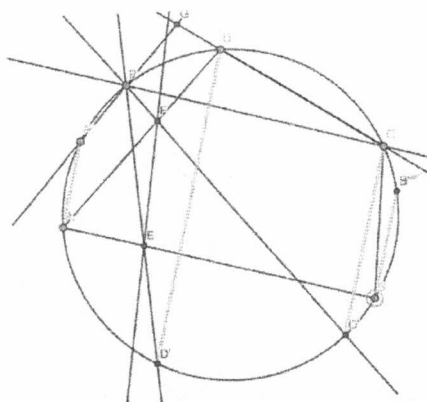


те  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  или продълженията им така, че лежат на една права  $k$ . Правите  $PD$ ,  $PE$  и  $PF$  пресичат за втори път окръжността в точки  $C'$ ,  $A'$  и  $B'$ . Вярно ли е, че правите  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  винаги са успоредни на правата  $k$ ? Отговорът е отрицателен (фиг. 6).



Фигура 6. Контрапример

Задачата би могла да бъде разгледана и за четириъгълник (фиг. 7).



Фигура 7. Изследване на задачата за четириъгълник

### 3. Дискусия

От шестимата български участници в това състезание двама имат пълен брой от 10 точки по втора задача, двама не са получили точки, един е с 4 и един – с 6 точки. Ръководителите на българския отбор и участниците от българска страна в обсъждането на задачите отчитат, че „ако се вложи малко труд в точен чертеж, наградата е голяма“ (Nikolov et al. 2006).



Причината е, че може да се забележи, че въпросната точка лежи върху окръжността.

Разгледаните компютърни модели по тази задача са използвани при подготовката на обучители за внедряване на изследователския подход в математическото образование. Тази подготовка включва „разширяване на знания и умения и формиране на отношение за извършване на математически изследвания, включително с използване на динамичен софтуер, разширяване на знания и умения и формиране на отношение за внедряване на изследователски подход в училищното образование по математика и формиране на знания, умения и отношение за подготовка на учители за внедряване на изследователски подход в училищното образование по математика“ (Chehlarova 2017). Затова при обучението им се осигуряват условия „за преживяване на изследователския процес и в ролята на ученици, и в ролята на учители, и в ролята на обучители“ (Chehlarova 2017), за което тази задача е подходяща.

Тези модели бяха използвани и в обучения на учители по математика и информатика както за подготовката им за внедряване на изследователския подход, така и за формиране на знания и умения за формулиране и решаване на задачи от тип PISA. Причината е, че използването на готови дигитални ресурси, както и модифицирането им, са важен елемент от подготовката за справяне със задачи, давани на PISA.

Тези образователни ресурси могат да служат за самоподготовка на ученици за олимпиади и за състезания (Chehlarova 2020), особено в онлайн състезания като „VIVA Математика с компютър“ и „Тема на месеца“ (Gachev et al. 2023).

Такива образователни ресурси са подходящи за работа в STEAM центрове. При използване на записа STEAM<sup>(2)</sup> за отбелязване на броя на предметните области, които са включени в конкретно STEAM обучение, в случая се имат предвид математика и технологии, а при използване на диаграмите на Вен от 5 групи това е визуализирано с оцветяване или именоване на съответната област (Chehlarova 2024).

Използването на олимпийски задачи е подходящо и за усвояване на софтуера. Тази задача е използвана за формиране на знания и умения за използване на *GeoGebra* от студент по време на практиката му в Института по математика и информатика на Българската академия на науките по програмата на МОН „Студентски практики“ през 2013 г.

#### 4. Заключение

Състезателната геометрия може да бъде развивана чрез софтуер като *GeoGebra*. Изследването на конструкции води до открития на непознати факти или до съставянето на оригинални и трудни задачи, подходящи



за състезания. Наличието на точен и интерактивен чертеж позволява разкриването на повече помощни факти, частни случаи и следствия. Изследването на вече дадени на олимпиади задачи подпомага учениците в подготовката за участия в следващи състезания, помага за разширяване на броя на учениците, които се докосват до олимпийски задачи.

Разкриването на функционалността на файл с конструкция като разглежданата, формулирането на хипотези, откриването на идея за решение, онагледяването на решение са елементи, формирането на които е важно за извършването на изследователска дейност по математика при използването на дигитални технологии. Такива дигитални образователни ресурси позволяват включването на олимпийски задачи както в неформалното, така и във формалното образование по математика и информационни технологии.

### БЕЛЕЖКИ

1. <https://cabinet.bg/content/bg/html/d18401.html>
2. <https://cabinet.bg/content/bg/html/d18399.html>
3. <https://cabinet.bg/content/bg/html/d18400.html>
4. <https://cabinet.bg/content/bg/ggb/d18399.ggb>
5. <https://cabinet.bg/content/bg/html/d18403.html>
6. <https://cabinet.bg/content/bg/html/d18404.html>

### ЛИТЕРАТУРА

- БОЙВАЛЕНКОВ, П., КОЛЕВ, Е., МУШКАРОВ, О., НИКОЛОВ, Н., 2008. *Балкански олимпиади по математика 1984 – 2006 г.*, Уни-мат, СМБ. ISBN: 978-954-8880-37-0.
- ГАЧЕВ Г., КЕНДЕРОВ, П., ЧЕХЛАРОВА, Т., 2023. Задачите от онлайн състезанието „VIVA Математика с компютър“ – ресурс за работа в STEM центровете. *Математика и информатика*, т. 66, № 6, pp. 579 – 595. doi: 10.53656/math2023-6-2-the.
- КОРТЕЗОВ, И., МАРИНОВ, М., 2022. Двадесет и шеста младежка балканска олимпиада по математика. *Математика и информатика*, т. 65, № 4, стр. 358 – 364. doi: 10.53656/math2022-4-3-dva.
- КОРТЕЗОВ, И., МАРИНОВ, М., 2023. Двадесет и седма младежка балканска олимпиада по математика. *Математика и информатика*, т. 66, № 6, стр. 645 – 652. doi: 10.53656/math2023-6-7-twe.
- НИКОЛОВ, Н., БОЙВАЛЕНКОВ, П., КОЛЕВ, Е., КОРТЕЗОВ, И., 2006. Quo Vadis? (23-та Балканска олимпиада по математика). *Математика*, бр. 5, стр. 24 – 27. ISSN: 0204-6881.



- ЧЕХЛАРОВА, Т., 2017. Подготовка на обучители за внедряване на изследователския подход в училищното образование по математика. Макрос 2000, Пловдив. ISBN: 978-954-561-428-6.
- ЧЕХЛАРОВА, Т., 2020. Ресурси за самопроверка във Виртуалния училищен кабинет по математика. *Педагогика*, т. 92, № 2, стр. 168 – 179. ISSN: 0861-3982 (Print), 1314-8540 (Online).

## REFERENCES

- BOYVALENKOV, P., KOLEV, E., MUSHKAROV, O., NIKOLOV, N., 2008. *Balkan Mathematical Olympiads*. Unimat. Union of Bulgarian Mathematicians (in Bulgarian). ISBN: 978-954-8880-37-0.
- CHEHLAROVA, T., 2017. *Educating the Educators for the Inquiry Based Mathematics Education in School*. Makros 2000, Plovdiv (in Bulgarian). ISBN: 978-954-561-428-6.
- CHEHLAROVA, T., 2020. Resources for Self-Assessment in the Virtual Mathematics Laboratory. *Pedagogika – Pedagogy*. vol. 92, no. 2, pp. 168 – 179 (in Bulgarian). ISSN: 0861-3982 (Print), 1314-8540 (Online).
- CHEHLAROVA, T., 2024. Visualization of steam with Venn diagrams. *Symmetry: Culture and Science*, vol. 35, no. 2, pp. 119 – 125. doi: 10.26830/symmetry\_2024\_2\_119
- CHEHLAROVA, T., GACHEV, G., KENDEROV, P., SENDOVA, E., 2014. A Virtual School Mathematics Laboratory. *V-th National conference in e-education*, pp. 146 – 151. ISBN: 978-954-712-611-4.
- GACHEV G., KENDEROV P., CHEHLAROVA T., 2023. Problems from the online competition "VIVA Mathematics with computer" – resource for education in STEM centers. *Mathematics and informatics*, vol. 66, no. 6, pp. 579 – 595 (in Bulgarian). doi: 10.53656/math2023-6-2-the
- HOHENWARTER, J., HOHENWARTER, M., LAVICZA, Z., 2009. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *J. of Computers in Mathematics and Science Teaching*, vol. 28, no. 2, pp. 135 – 146. ISSN: 0731-9258.
- KENDEROV, P., 2010. Higher Ability Students and Inquiry Based Learning in Bulgaria – the Role of European Projects InnoMathEd and Fibonacci. *Proceedings of the 6-th Conference of the World Federation of National Mathematics Competitions (WFNMC)*, Riga. ISBN: 973-9984-45-376-7.
- KORTEZOV, I., MARINOV M., 2022. Twenty-Sixth Junior Balkan Mathematical Olympiad. *Mathematics and Informatics*. vol. 65,